

# XI Encuentro Andaluz de Geometría

15 de mayo de 2015

Universidad de Sevilla:  
Facultad de Matemáticas  
CRAI Antonio de Ulloa  
IMUS

Grupos de investigación  
FQM-324 y FQM-327



# XI Encuentro Andaluz de Geometría

Organizadores:

Alfonso Carriazo, M. Carmen Márquez,  
Alfonso Romero y Ceferino Ruiz



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA



Universidad de Granada



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA



# Participantes

1. Luis A. Aké  
(Univ. Málaga)
2. Gülhan Ayar  
(Univ. Sevilla y  
Düzce Univ., Turkey )
3. Joaquín Barrera  
(Univ. Sevilla)
4. Jesús A. Bueno  
(Univ. Granada)
5. José L. Cabrerizo  
(Univ. Sevilla)
6. Antonio Cañete  
(Univ. Sevilla)
7. Alfonso Carriazo  
(Univ. Sevilla)
8. Nastassja Cipriani  
(Univ. País Vasco y  
KU Leuven, Belgium)
9. Cristina Draper  
(Univ. Málaga)
10. José M. Escobar  
(Univ. Sevilla)
11. Luis M. Fernández  
(Univ. Sevilla)
12. Manuel Fernández  
(Univ. Sevilla)
13. Daniel de la Fuente  
(Univ. Granada)
14. Alejandro García  
(Univ. Sevilla)
15. Manuel Gutiérrez  
(Univ. Málaga)
16. Ana M. Lerma  
(Univ. Jaén)
17. M. Carmen Márquez  
(Univ. Sevilla)
18. Verónica Martín  
(Univ. Sevilla)
19. Pablo Morales  
(Univ. Granada)
20. Juan Núñez  
(Univ. Sevilla)
21. Benjamín Olea  
(Univ. Málaga)
22. Miguel Ortega  
(Univ. Granada)
23. Francisco J. Palomo  
(Univ. Málaga)
24. Pedro Pérez  
(Univ. Sevilla)
25. Alfonso Romero  
(Univ. Granada)
26. Rafael M. Rubio  
(Univ. Córdoba)
27. Ceferino Ruiz  
(Univ. Granada)
28. Ignacio Sánchez  
(Univ. Granada)
29. José A. Sánchez  
(Univ. Granada)

30. Miguel Sánchez  
(Univ. Granada)
31. Víctor Sanmartín  
(Univ. Santiago de Compostela)
32. José M. M. Senovilla  
(Univ. País Vasco)



# Programa

## Sesión matinal: Facultad de Matemáticas de la Univ. de Sevilla

09.45 Antonio Beato (Decano de la Facultad de Matemáticas)  
Alfonso Carriazo y M. Carmen Márquez  
*Apertura del XI Encuentro Andaluz de Geometría.*

10.00 Jesús A. Bueno  
*Diferenciales cuadráticas holomorfas en superficies lineales de Weingarten elípticas.*

10.20 Antonio Cañete  
*El problema isoperimétrico en variedades con densidad.*

10.40 Benjamín Olea  
*Hipersuperficies luz umbílicas en espacios Robertson-Walker generalizados.*

11.00 Nastassja Cipriani  
*Umbilical spacelike submanifolds in Lorentzian geometry.*

11.30 Descanso / café

12.00 Daniel de la Fuente  
*The uniformly accelerated motion in General Relativity from a geometric point of view.*

12.20 Cristina Draper  
*Variedades de Riemann-Cartan en esferas impares.*

12.40 Alejandro García  
*Una aproximación geométrica a la aerodinámica de curvas y superficies.*

13.00 Víctor Sanmartín

*Hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo.*

13.30 Visita al IMUS

14.00 Almuerzo

## Sesión vespertina: CRAI Antonio de Ulloa de la Univ. de Sevilla

16.00 Visita al CRAI Antonio de Ulloa

17.00 Luis A. Aké

*Propiedades causales de espacio-tiempos multialabeados.*

17.20 José M. Escobar

*On contractions of Lie algebras.*

17.40 Gülan Ayar

*Singular semi-Riemannian almost contact manifolds.*

18.00 Ana M. Lerma

*Lagrangian translators under mean curvature flow.*

18.20 Pablo Morales

*Una nota sobre clases de monotopía causal.*

18.40 Descanso / café

19.15 Alfonso Romero y Ceferino Ruiz

*Clausura del XI Encuentro Andaluz de Geometría.*

# Resúmenes

## Jesús A. Bueno

*Diferenciales cuadráticas holomorfas en superficies lineales de Weingarten elípticas.*

Consideramos superficies en  $\mathbb{M}^3$  que satisfacen una relación del tipo  $\alpha + 2\beta H + \gamma K_{\text{ext}} = 0$ . Para una familia de estas superficies, las de tipo elíptico, construimos una métrica a partir de I y II, para la cual la diferencial de Hopf es holomorfa respecto a la estructura conforme inducida por tal métrica.

## Antonio Cañete

*El problema isoperimétrico en variedades con densidad.*

Una densidad en una variedad es una función positiva que proporciona una nueva medida en la variedad, modificando los funcionales asociados de área y volumen. En esta charla repasaremos algunos resultados obtenidos para el problema isoperimétrico, cuando se consideran algunas densidades especialmente interesantes.

## Benjamín Olea

*Hipersuperficies luz umbílicas en espacios Robertson-Walker generalizados.*

Una hipersuperficie de una variedad de Lorentz es luz si el tensor métrico inducido en ella es degenerado en todos sus puntos. Estas hipersuperficies, que no tienen análogo Riemanniano, son interesantes desde un punto de vista tanto geométrico como físico, siendo el cono luz en un punto uno de los ejemplos más importantes. Veremos que en un espacio Robertson-Walker generalizado, una hipersuperficie luz umbílica induce una descomposición isométrica en la fibra y recíprocamente, obteniendo así una correspondencia entre hipersuperficies luz y descomposiciones isométricas. Esto nos permite obtener obstrucciones a la existencia de hipersuperficies luz umbílicas así como la existencia de hipersuperficies duales a una dada. Los conos luz en un espacio Robertson-Walker son hipersuperficies luz umbílicas. Probaremos que bajo cierta condición sobre la función de alabeo, estas son las únicas hipersuperficies luz umbílicas en  $I \times_f \mathbb{S}^n$ . En particular, lo anterior se aplica al modelo cosmológico de Friedmann cerrado. Finalmente, estudiaremos las hipersuperficies luz umbílicas en un espacio estático estándar, obteniendo resultados análogos a los presen-

tados para espacios Robertson-Walker generalizados. Por ejemplo, se probará la unicidad de pares de hipersuperficies luz umbílicas en los espacios Reissner-Nordström y en el De Sitter-Schwarzschild.

Trabajo conjunto con Manuel Gutiérrez.

### Nastassja Cipriani

*Umbilical spacelike submanifolds in Lorentzian geometry.*

The shear-free condition for null vector fields has been important in gravitational theories. To mention one outstanding example, observe that any Non-Expanding Horizon has a shear-free null generator. This implies that the horizon is foliated by marginally trapped surfaces that are umbilical along the null generator. This has prompted us to analyze spacelike surfaces which are umbilical along a normal (not necessarily null) direction. From a mathematical point of view, an  $n$ -dimensional spacelike submanifold  $S$  immersed in a  $(n+2)$ -dimensional pseudo-Riemannian manifold is said to be umbilical along a normal direction  $N$  if the Weingarten operator associated to  $N$  is proportional to the identity. In particular,  $S$  is pseudo-umbilical (ortho-umbilical) if the umbilical direction is given by the mean curvature vector field  $H$  (by its orthogonal in the normal bundle  $\star \perp H$ ). The total shear will be defined as the trace-free part of the shape tensor. Then, necessary and sufficient conditions for  $S$  to be umbilical are presented: an algebraic equation for two independent Weingarten operators must hold; equivalently, the total shear spans a unique normal direction, say  $G$ . The vector field  $G$  plays a role concerning umbilicity similar to that of  $H$  concerning volume variation. Moreover, when an umbilical direction exists, it is determined uniquely by  $\star \perp G$ , while the totally umbilical case is defined by the vanishing of  $G$ . Characterizations for the pseudo and ortho-umbilical cases are also given, and some special features arising in the Lorentzian case, or when  $n = 2$ , will be discussed.

### Daniel de la Fuente

*The uniformly accelerated motion in General Relativity from a geometric point of view.*

The notion of a uniformly accelerated rectilinear motion of an observer in a general spacetime is analysed in detail [1]. Such an observer may be seen as a Lorentzian circle, providing a new characterization

of a static standard spacetime. The trajectories of uniformly accelerated rectilinear observers are seen as the projection on the spacetime of the integral curves of a vector field defined on a certain fiber bundle over the spacetime. Using this tool, we find geometric assumptions to ensure that an inextensible uniformly accelerated rectilinear observer does not disappear in a finite proper time.

[1] D. de la Fuente and A. Romero, Uniformly accelerated motion in General Relativity: completeness of inextensible trajectories, *Gen. Relativ. Gravit.* (2015), DOI 10.1007/s10714-015-1879-3.

## Cristina Draper

*Variedades de Riemann-Cartan en esferas impares.*

Una variedad de Riemann-Cartan es un triple  $(M, g, \nabla)$  con  $(M, g)$  variedad de Riemann y  $\nabla$  una conexión afín compatible con la métrica (¡no necesariamente la Levi-Civita!). Fueron introducidas por E. Cartan en los años 20, ya que él creía en el papel que desempeñaba la torsión para adaptarse tanto al mundo físico como a la situación geométrica real de la variedad. Sus teorías resurgieron con fuerza en Física, donde la torsión se está aplicando activamente tanto a las teorías gravitatorias como a la teoría de supercuerdas ([1] es un estudio recopilatorio muy interesante y completo). En nuestro trabajo conjunto con A. Garvín y F. J. Palomo [3], estudiamos las esferas impares  $S^{2n+1}$  como variedades homogéneas  $SU(n+1)/SU(n)$  y en ellas determinamos las conexiones afines que además de ser compatibles con la métrica sean  $SU(n+1)$ -invariantes. La determinación completa es posible gracias al teorema de Nomizu clásico (1954) sobre conexiones afines invariantes en espacios homogéneos reductivos, que reduce el problema geométrico a uno de representaciones de álgebras de Lie. Las cuestiones sobre la compatibilidad con la métrica o la clasificación del tipo de torsión también se expresan en términos algebraicos. Para recuperar la información geométrica y expresar las conexiones en términos de derivadas covariantes, utilizamos los tensores propios de la estructura Sasakiana usual de la esfera de dimensión impar. En los casos de dimensiones bajas no es suficiente con ellos, y será necesario emplear una 3-forma procedente de la estructura 3-Sasakiana en  $S^7$  y otra estructura casi-contacto métrica en  $S^5$  proporcionada por la inclusión isométrica natural de  $S^5$  en la variedad nearly Kahler  $S^6$ . Como aplicación, caracterizamos  $S^7$  y  $S^3$  como las únicas esferas impares admitiendo conexiones afines invariantes distintas de la Levi-Civita satisfaciendo una condición *tipo Einstein* (ver [2]).

- [1] I. Agricola, Nonintegrable geometries, torsion, and holonomy, *Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry*, 277–346, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 16, Eur. Math. Soc., Zürich, 2010.
- [2] I. Agricola and A. C. Ferreira, Einstein manifolds with skew-torsion, *Q. J. Math.*, 65 (2014), 717–741.
- [3] C. Draper, A. Garvín and F. J. Palomo, Invariant affine connections on odd-dimensional spheres, Preprint arXiv:1503.08401.
- [4] C. Draper and F. J. Palomo, Homogeneous Riemann-Cartan spheres, *Pure and Applied Differential Geometry: in Memory of Franki Dillen, PADGE 2012* (2013), 126–134.

### Alejandro García

*Una aproximación geométrica a la aerodinámica de curvas y superficies.*

En esta charla presentaremos una primera aproximación al estudio geométrico de la aerodinámica de curvas y superficies. Para ello, comenzaremos motivando dicho estudio a partir de situaciones concretas y ejemplos físicos, para después, adaptar el método de aproximación normal de curvas y superficies regulares mediante curvas y superficies de Bézier, introducido en [1]. Concluiremos presentando algunos ejemplos y animaciones.

- [1] A. Carriazo, M. C. Márquez and H. Ugail, Normal approximations of regular curves and surfaces. To appear in *Filomat*.

Trabajo realizado en colaboración con Alfonso Carriazo y M. Carmen Márquez.

### Víctor Sanmartín

*Hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo.*

El objetivo de la comunicación es presentar distintas familias (tanto homogéneas como no homogéneas) de hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo. Mostraremos que las familias presentadas cubren todas las posibles hipersuperficies isoparamétricas.

## Luis A. Aké

*Propiedades causales de espacio-tiempos multialabeados.*

En [1] se estudia la estructura causal del producto alabeado  $(L \times H, g_L + f^2 g_H)$  donde  $(L, g_L)$  es una variedad de Lorentz y  $(H, g_h)$  es una variedad Riemanniana, pero se omiten los casos causalmente continuo y causalmente simple. En este trabajo estudiamos las propiedades causales de los espacio-tiempos multialabeados  $\mathbb{R} \times_{\alpha_1} M_1 \times \dots \times_{\alpha_n} M_n$  con métrica  $g = -dt^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$  donde  $(M_i, g_i)$  son variedades Riemannianas y  $\alpha_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^+$  son funciones diferenciables positivas. Los resultados obtenidos establecen condiciones sobre las variedades Riemannianas  $(M_i, g_i)$  de tal forma que los espacio-tiempos multialabeados son causalmente continuos y causalmente simples.

[1] J. K. Beem, P. E. Ehrlich and K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Second edition (CRC Press) 1996.

[2] J. L. Flores and M. Sánchez, Geodesic Connectedness of Multiwarped Spacetimes, *J.Differential Equations* 186 (2002) 1-30.

[3] M. Sánchez and E. Minguzzi, The Causal Hierarchy of Spacetimes, Recent developments in pseudo-Riemannian Geometry, *ESI Lectures in Mathematics and Physics*, 2008.

[4] M. Sánchez, Geodesic Connectedness in Generalized Reissner-Nordström Type Lorentz Manifolds, *Gen. Relativ. Gravit.*, vol 29, No. 8. 1997.

[5] S. W. Hawking and R. K. Sachs, Causally continuous spacetimes, *Comm. Math. Phys.* Vol. 35, No. 4, 1974.

## José M. Escobar

*On contractions of Lie algebras.*

Esta comunicación está centrada en el estudio de las contracciones de ciertos tipos de álgebras de Lie de baja dimensión, con el objetivo de abordar la aplicación de los resultados obtenidos a ciertos conceptos físicos, como por ejemplo, el proceso límite por el cual la mecánica cuántica se contrae a la mecánica clásica. Para ello, se tratan en primer lugar las contracciones de las álgebras de Lie filiformes, introducidas por M. Vergné en 1966, usando para ello las funciones invariantes  $\psi$  y  $\varphi$ , introducidas en 2008 por Hrivnák y Novotny. Se estudian también estas funciones en otros tipos de álgebras, como las de Heisenberg, y las posibles contracciones existentes entre unas álgebras y otras.

## Gülhan Ayar

*Singular semi-Riemannian almost contact manifolds.*

In this talk we will present singular semi-Riemannian manifolds (introduced by D. N. Kupeli in [1]) with an adapted almost contact structure. We will study the main facts about such a structure, with some examples. Finally, we will focus on some curvature properties.

[1] D. N. Kupeli, *Singular Semi-Riemannian Geometry*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

Joint work with Alfonso Carriazo and Nesip Aktan.

## Ana M. Lerma

*Lagrangian translators under mean curvature flow.*

We provide a new construction of Lagrangian surfaces in  $\mathbb{C}^2$  in terms of two planar curves. When we take such curves as appropriate solutions of the curve shortening problem, including self-shrinking and self-expanding curves or spirals, we will obtain translating solitons which generalize the Joyce, Lee and Tsui ones in dimension two [J. Differential Geom. 84 (2010), 127–161]. Finally, we characterize locally all examples in terms of an analytical condition on the Hermitian product of the position vector of the immersion and the translating vector that allows us separation of variables. As a consequence we get the classification of the Hamiltonian stationary Lagrangian translating solitons for Lagrangian mean curvature flow in complex Euclidean plane.

## Pablo Morales

*Una nota sobre clases de homotopía causal.*

El objetivo de esta charla es construir y discutir espaciotiempos globalmente hiperbólicos con infinitas clases de homotopía causal o temporal para curvas que conectan dos puntos prescritos.

## Agradecimientos:



JUNTA DE ANDALUCÍA

CONSEJERÍA DE ECONOMÍA, INNOVACIÓN, CIENCIA Y EMPLEO



FACULTAD DE MATEMÁTICAS



CRAI  
ANTONIO DE ULLOA



imus  
Instituto de Matemáticas de la  
Universidad de Sevilla



IEMATH  
INSTITUTO ESPAÑOL  
DE MATEMÁTICAS



DEPARTAMENTO DE  
GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

GEOMETRÍA  TOPOLOGÍA  
Universidad de Granada